106. Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E. Sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

Cadre : Tous les corps sont supposés commutatifs. K est un corps, E est un K-espace vectoriel (ev) de dimension finie $n \geq 1$.

[Per]
I. $GL(E)$, $SL(E)$: définitions et premières propriétés.

Déf. ①: Le groupe linéaire de E est l'ensemble des endomorphismes de E inversibles, noté $GL(E)$. $GL_n(K)$ est l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$.

95 Prop. ②: $(GL(E), \circ)$ (resp. $(GL_n(K), \times)$) est un sous-groupe de $\mathcal{L}(E)$ (resp. $\mathcal{M}_n(K)$). La donnée d'une base de E induit un isomorphisme entre $GL(E)$ et $GL_n(K)$.

Prop./Déf. ③: $\det : GL(E) \to (K^*, \cdot)$ est un morphisme de groupes surjectif. Son noyau $\{u \in GL(E) / \det u = 1\}$ est appelé groupe spécial linéaire, noté $SL(E)$.

Prop. ④: $SL(E) \triangleleft GL(E)$ et $GL(E) \simeq SL(E) \rtimes K^*$

II. Action de $GL(E)$ / $GL_n(K)$

1) Action par translation (à gauche)

Déf. ⑤: $(P, M) \in GL_n(K) \times \mathcal{M}_n(K) \mapsto PM$ est une action de groupe appelée action par translation.

♡ Prop. ⑥: L'action par translation de $GL(E)$ sur l'ensemble des sev de E de même dimension est transitive.

Appli. ⑦: voir III pour une application

2) Action par conjugaison

[H2G2] Déf. ⑧: $(P, M) \in GL_n(K) \times \mathcal{M}_n(K) \mapsto PMP^{-1}$ est une action de groupe appelée action par conjugaison. Deux matrices dans une même orbite sont dites conjuguées. Elles représentent alors le même endomorphisme de K^n dans deux bases différentes.

121

♡ Prop. ⑨: Le déterminant, le rang, la trace et le polynôme caractéristique (dits invariants de similitude) sont des invariants pour cette action.

121 Prop. ⑩: Le polynôme caractéristique, le spectre (avec multiplicité) sont des invariants totaux de la restriction de l'action par conjugaison de $GL_n(K)$ sur $\mathcal{D}_n(K)$, ensemble des matrices diagonalisables.

Rq ⑪: Faux dans le cas général. $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ ne sont pas semblables. ♡

Rq ⑫: Les théorèmes de réduction de Jordan et de Frobenius donnent respectivement les invariants totaux de similitude pour les matrices nilpotentes et tous les éléments de $\mathcal{M}_n(K)$.

3) Action par congruence $\quad car(K) \neq 2$ [H2G2]

Déf. ⑬: $\mathcal{S}_n(K) = \{M \in \mathcal{M}_n(K) / {}^tM = M\}$ est l'ensemble des matrices symétriques 250

Déf. ⑭: $(P, M) \in GL_n(K) \times \mathcal{S}_n(K) \mapsto {}^tPMP$ est une action de groupe appelée action par congruence. Elle correspond à la formule de changement de base pour une forme quadratique sur K^n.

Notation ⑮: $K^2 = \{x^2, x \in K\}$ $\quad K^{*2} = \{x^2, x \in K^*\}$

Th. ⑯: (classification des formes quadratiques)

1) $K = \mathbb{C}$: $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$, $rg(M) = r$. $\exists P \in GL_n(\mathbb{C}) / M = {}^tP \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$. 254
$M, N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ sont congruentes SSI $rg(M) = rg(N)$.

2) $K = \mathbb{R}$: $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $rg(M) = r$. $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, $\exists! (p,q) \in \mathbb{N}^2 / p+q = r /$ $M = {}^tP \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix} P$. (p,q) est appelé signature de M, notée $sgn(M)$.
$M, N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont congruentes SSI $sgn(M) = sgn(N)$. [Per]

3) $K = \mathbb{F}_q$: Soit $\alpha \in \mathbb{F}_q$, $\alpha \notin \mathbb{F}_q^{*2}$. Il y a deux classes de congruence sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{F}_q) \cap GL_n(\mathbb{F}_q)$: I_n et $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha \end{pmatrix}$. 129

Appli. ⑰: (loi de réciprocité quadratique) [H2G2]
Soient p, q premiers impairs. Alors $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$ 303

III. Éléments de $GL(E)$ et $SL(E)$ - Générateurs

1) Homothéties

Déf./Prop. ⑱: On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie s'il existe $\lambda \in K$ tel que $u = \lambda\, id$ où $id = id_E$.
On a alors $u \in GL(E) \iff \lambda \neq 0$ et $u \in SL(E) \iff \lambda^n = 1$. [Per]

Prop. ⑲: $u \in GL(E)$ est une homothétie SSI u laisse invariante toute droite vectorielle de E. 98
Autrement dit, l'ensemble des homothéties est l'intersection des stabilisateurs des droites vectorielles pour l'action par translation de $GL(E)$.

98 **Th. (20)**: 1) Le centre Z de $GL(E)$ est formé des homothéties de rapport non nul. On a donc $Z \simeq K^*$
2) Le centre de $SL(E)$ est $Z \cap SL(E) = \{x \mapsto \lambda x,\ \lambda^n = 1\}$.

2) Transvections

[Ber] **Déf. (21)**: Soit H un hyperplan de E et $\mathcal{D} \subset H$ une droite. $u \in \mathcal{L}(E)$ est
73 une transvection d'hyperplan H et de droite $\mathcal{D}$ si:
1) $u \neq id$ 2) $\forall x \in H,\ u(x) = x$ 3) $\forall x \in E,\ u(x) - x \in \mathcal{D}$

Prop. (22): Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Sont équivalentes:
1) u est une transvection 2) $\mathrm{Ker}(u-id)$ est un hyperplan et $(u-id)^2 = 0$
74 3) $\exists\, \varphi \in \mathcal{L}(E,K),\ \varphi \neq 0,\ \exists\, a \in \mathrm{Ker}\,\varphi \setminus \{0\} \,/\, \forall x \in E\ \ u(x) = x + \varphi(x)a$
4) $\exists\, \mathcal{B}$ base de E / $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix} 1 & & \lambda \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}^{i} = T_{ij}(\lambda)$ où $\begin{cases} 1 \leq i \neq j \leq n \\ \lambda \neq 0 \end{cases}$

75 **Rq (23)**: $T_{ij}(\lambda) \in SL(E)$ et $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$

[Per] **Prop. (24)**: 1) Les transvections sont conjuguées dans $GL(E)$
100 2) Si $n \geq 3$, elles le sont également dans $SL(E)$.

Prop. (25): On suppose $n = 2$.
1) Toute matrice de transvection est conjuguée d'une matrice $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
101 où $\lambda \in K^*$
2) Soient $\lambda, \mu \in K^*$. Alors $M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont conjuguées dans $SL_2(K)$ SSI $\lambda/\mu \in K^{*2}$.

Prop. (26): Soit τ une transvection d'hyperplan H et de droite $\mathcal{D}$ et
98 $u \in GL(E)$. Alors $u\tau u^{-1}$ est une transvection d'hyperplan $u(H)$ et de droite $u(\mathcal{D})$.

3) Dilatations

[Per] **Déf./Prop. (27)**: Soit H un hyperplan de E et $u \in GL(E)$ tel que $u_{|H} = id_{|H}$.
Sont équivalentes:
96 1) $\det u = \lambda \neq 1$ 2) u admet une valeur propre $\lambda \neq 1$ et u est diagonalisable
3) $\mathrm{Im}(u - id) \not\subset H$
4) dans une base convenable u a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \ \lambda \end{pmatrix} = D_n(\lambda)$, $\lambda \in K \setminus \{0,1\}$

u est alors appelé dilatation d'hyperplan H, de droite D et de rapport λ.
On a de plus $D = \mathrm{Im}(u-id)$ et $H = \mathrm{Ker}(u-id)$.
Notation (28): Pour $1 \leq i \leq n$, $D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}^{i}$

4) Générateurs de $GL(E)$ et de $SL(E)$ [Ber]

Prop. (29): Soient $1 \leq i \neq j \leq n$, $\lambda \in K^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(K)$. On a la correspondance:

opération	$T_{ij}(\lambda)M$	$M\,T_{ij}(\lambda)$	$D_i(\lambda)M$	$M\,D_i(\lambda)$
effet	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$	$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$C_i \leftarrow \lambda C_i$

80

Th. (30): 1) $SL(E)$ est engendré par les transvections 79
2) $u \in GL(E)$ est la composée de transvections et d'au plus une dilatation
Prop. (32): Si $|K| \geq 3$, $GL(E)$ est engendré par les dilatations. 81

IV. Sous-groupes de $GL(E)$

1) Sous-groupes finis [OA]

Déf. (33): Soit $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ la base canonique de K^n et $\sigma \in S_n$. On 187
définit $u_\sigma \in \mathcal{L}(K^n)$ par $u_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ pour $1 \leq i \leq n$.
La matrice de permutation associée est $P_\sigma = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u_\sigma = (\delta_{i\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$
Ex (34): $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P_{(132)}$ 188

Prop. (35): 1) $\forall \sigma \in S_n,\ u_\sigma \in GL(K^n)$ et $\det u_\sigma = \varepsilon(\sigma)$
2) $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in S_n,\ u_{\sigma_1\sigma_2} = u_{\sigma_1} \circ u_{\sigma_2}$ et $u_{\sigma_1^{-1}} = u_{\sigma_1}^{-1}$
3) $\{u_\sigma,\ \sigma \in S_n\}$ est un sous-groupe fini de $GL(K^n)$ de cardinal $n!$

Appli. (36): (pivot de Gauss)
Soit $1 \leq i \neq j \leq n$ et $M \in \mathcal{M}_n(K)$. On a alors la correspondance: 187
$P_{(ij)} A : L_i \leftrightarrow L_j$ et $A P_{(ij)} : C_i \leftrightarrow C_j$.
L'algorithme du pivot de Gauss repose sur les matrices de transvections et de transpositions pour mettre $M \in \mathcal{M}_n(K)$ sous forme échelon.
Ex (37): $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{(12)}.M} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_{32}(-2).M} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

♡ Cet algorithme permet de calculer le rang, le déterminant (⚠ $\det P_{(ij)} = -1$) et de résoudre un système d'équations linéaires.

188 **Prop. (38)** : L'application $S_n \to GL_n(K)$, $\sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupes injectif

♡ **Appli. (39)** : Démonstration de l'existence d'un p-Sylow pour un groupe fini.

DVP 1 [FGN2] 185 **Th. (40)** : (Burnside)
Tout sous-groupe d'exposant fini de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini.

2) Groupe orthogonal

Cadre (41) : $(E, \langle , \rangle)$ est dans cette partie un espace euclidien. On notera u^* l'adjoint de $u \in \mathcal{L}(E)$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur E.

Déf. (42) : $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie si : $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle \ \forall (x,y) \in E^2$.

Prop. (43) : u conserve $\langle , \rangle \iff u$ conserve $\|\cdot\| \iff u^* u = id$

[Ber] 99 **Déf. (44)** : On notera $O(E)$ le groupe des isométries. $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$. On notera $SO(E) = \{u \in O(E) / \det u = 1\}$ le groupe spécial orthogonal qui est un sous-groupe de $SL(E)$.
Enfin, $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tMM = I_n\}$ et $SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) / \det M = 1\}$

98 **Prop. (45)** : $u \in O(E)$ ssi il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ (bon) de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u \in O_n(\mathbb{R})$.

97 **Rappel (46)** : $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie si $s \neq id$ et $s^2 = id$. Si on pose $E^+ = \mathrm{Ker}(s - id)$ et $E^- = \mathrm{Ker}(s + id)$, on a alors $E = E^+ \oplus E^-$.

Prop. (47) : Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. s est dite orthogonale si $s \in O(E)$.
On a de plus $s \in O(E) \iff E^+ = (E^-)^\perp$.

~101 **Déf. (48)** : 1) Une réflexion est une symétrie s telle que $\dim E^- = 1$. C'est alors une dilatation de rapport -1.
104 2) Un renversement est une symétrie orthogonale telle que $\dim E^- = 2$.

102 DVP 2 **Th. (49)** : (générateurs de $O(E)$)
Soit $u \in O(E)$ et $r_u = rg(u - id)$. Alors :
1) u est la composée de r_u réflexions orthogonales
2) si u est la composée de p réflexions orthogonales, alors $p \geq r_u$.

Th. (50) : (générateurs de $SO(E)$) DVP 2 104
Soit $u \in SO(E)$. Si $n \geq 3$, alors u est la composée d'au plus n renversements.

Rq (51) : Faux si $n = 2$ ($-id$ est le seul renversement) 105

V. Éléments de topologie $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Prop. (52) : $GL_n(K)$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(K)$. ♡

Rq (53) : Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach, $GL_c(E)$ est toujours ouvert dans $\mathcal{L}_c(E)$ mais la densité n'est plus assurée. [NH2G2] 116

Prop. (54) : 1) $SL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs. [NH2G2] 26
2) $GL_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes : $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$

Appli. (55) : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective [Za] 49

Déf. (56) : $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) / \forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXMX \geq 0\}$
$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) / \forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXMX > 0\}$

Prop. (57) : $O_n(\mathbb{R})$ est compact ♡

Th. (58) : (décomposition polaire) [NH2G2] 348
$\mu : O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$, $(O, S) \mapsto OS$ est un homéomorphisme

Appli. (59) : $\forall A \in GL_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$ 351
où $\|A\|_2 = \sup_{\|X\|_2 = 1} \|AX\|_2$ et $\rho(M) = \max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(M)\}$

Appli. (60) : Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ contenant $O_n(\mathbb{R})$ est $O_n(\mathbb{R})$ lui-même.

Prop. (61) : $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme 357

Coro (62) : $GL_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ sont homéomorphes. 358

Références:

- [Ber] Berhuy, *Algèbre : le grand combat* (2^e éd.)
- [Per] Perrin, *Cours d'algèbre*
- [NH2G2] Caldero, *Nouvelles histoires ... Tome 1*
- [H2G2] " , *Histoires ... Tome 1*
- [OA] Beck, *Objectif agrégation* (2^e éd.)
- [FGN2] Francinou, *Oraux X-ENS Algèbre 2*